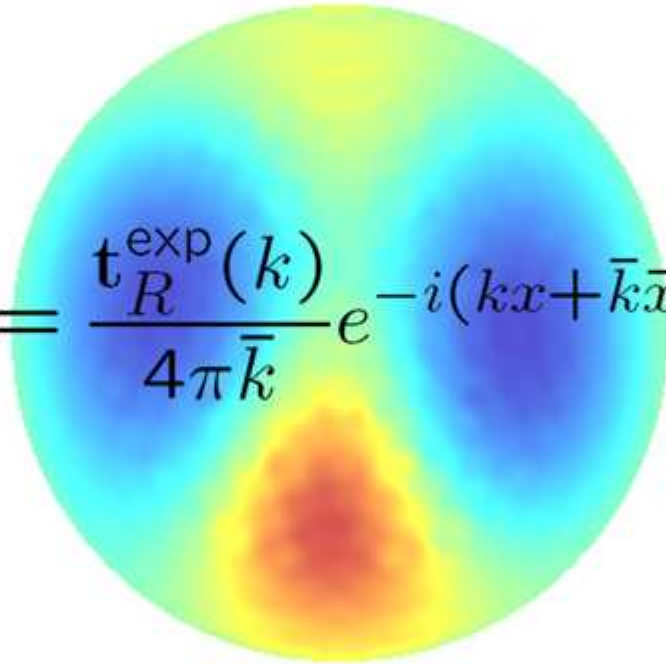


Sähköinen kuvantaminen: inversio-ongelmat lääketieteen palveluksessa

$$\frac{\partial}{\partial \bar{k}} \mu_R(x, k) = \frac{t_R^{\text{exp}}(k)}{4\pi \bar{k}} e^{-i(kx + \bar{k}\bar{x})} \overline{\mu_R(x, k)}$$



Samuli.Siltanen@iki.fi
Tampereen teknillinen yliopisto

Suomen matemaattinen yhdistys
Vuosikokousesitelmä 9.3.2009



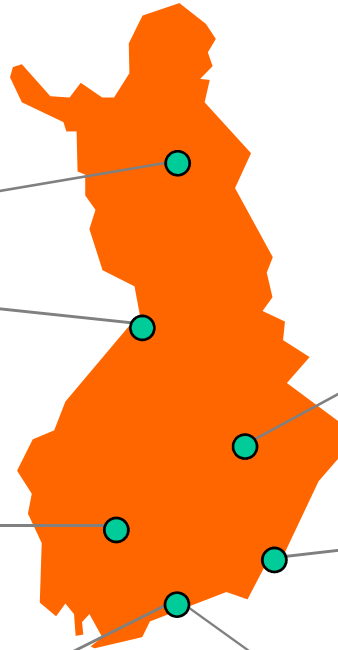
Inversio-ongelmien huippuyksikkö



TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



TEKNILLINEN KORKEAKOULU
TEKNISKA HÖGSKOLAN
HELSINKI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



UNIVERSITY OF KUOPIO



LAPPEENRANTA
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



UNIVERSITY OF HELSINKI

Rolf Nevanlinna Institute

Research institute of mathematics, computer science and statistics

<http://math.tkk.fi/inverse-coe/>

Tutkimus on tehty yhteistyössä seuraavien professorien kanssa:



David Isaacson

Rensselaer Polytechnic Institute, USA



Kim Knudsen

Tanskan teknillinen yliopisto



Matti Lassas

Helsingin yliopisto



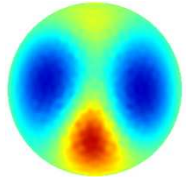
Jennifer Mueller

Colorado State University, USA



Jon Newell

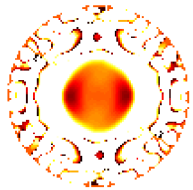
Rensselaer Polytechnic Institute, USA



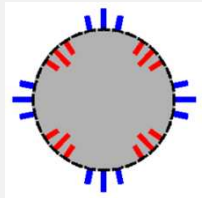
1. Käänteinen johtavuusongelma



2. Kuvantamisen teoria I: äärettömän tarkka mittaustdata



3. Kuvantamisen teoria II: kohinainen mittaustdata



4. Numeerinen toteutus tietokoneella



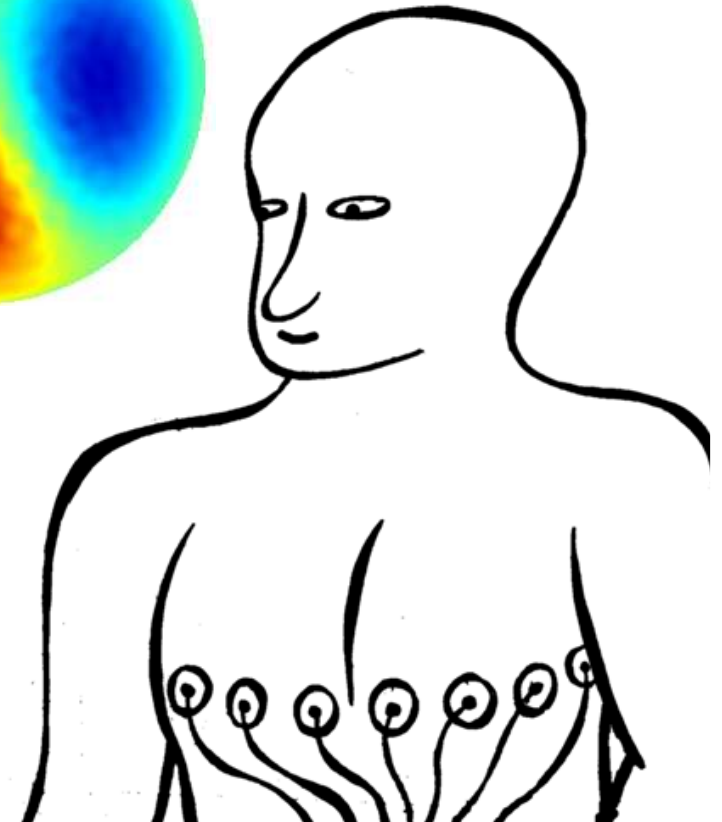
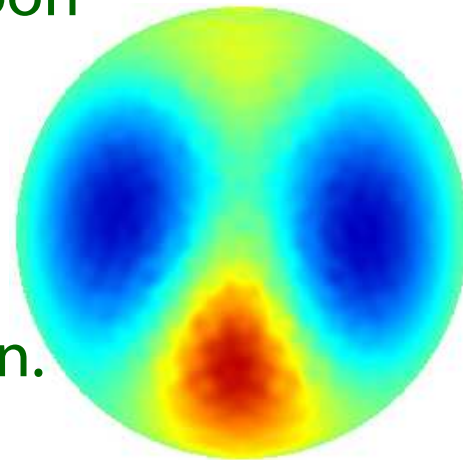
5. Rekonstruktioita

Sähköinen impedanssitomografia on lupaava lääketieteellinen kuvantamismenetelmä

Potilaaseen syötetään vaarattomia ja kivuttomia sähkövirtoja ihoon kiinnitettyjen elektrodien kautta.

Virtojen seurauksena syntyvät jännitteet mitataan.

Tavoitteena on muodostaa kuva sähkönjohtavuuden jakaumasta kaksiulotteisessa leikkeessä. Koska eri kudoksilla on erilainen johtavuus, kuvassa näkyvät eri sisäelimet ja niiden rajapinnat.



Impedanssitomografialle on lukuisia sovelluskohteita:

Tehohoitopotilaan sydämen ja keuhkojen valvonta

Rintasyövän varhainen diagnosointi

Elektrokardiografian (EKG) tehostaminen

Keuhkoihin kertyneen nesteen mittaaminen

Happiaineenvaihdunnan seuranta

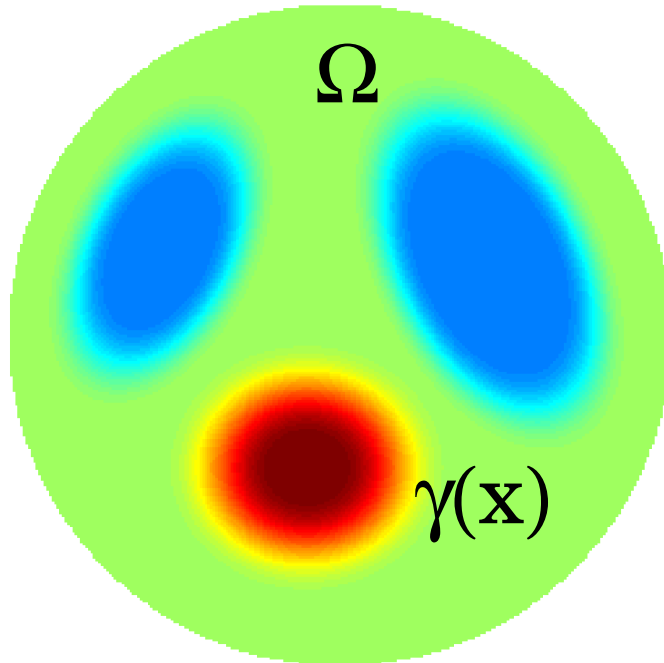
Keskosten aivoverenvuotojen havaitseminen (optinen tomo)

Impedanssitomografian etuna on mittauslaitteiston edullisuus sekä mittaustavan harmittomuus.

Yhdistettynä muihin kuvantamismenetelmiin se tarjoaa entistä monipuolisempaa tietoa potilaasta.

Haittana on alhainen paikkaresoluutio.

Calderónin muotoilema käänteinen johtavuusongelma on impedanssitomografian malli



$$\Lambda_{\gamma} f = \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega},$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \gamma \nabla u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= f \quad \text{on } \partial \Omega. \end{aligned}$$

Oletetaan, että $0 < c \leq \gamma(x) \leq C$

Määräytyykö johtavuus yksikäsitteisesti Dirichlet-Neumann-kuvauksesta? Jos määräytyy, miten johtavuus lasketaan siitä?
Tämä on epälineaarinen ja virheherkkä inversio-ongelma.

Miksi Calderónin ongelma on epälineaarinen?

Dirichlet-Neumann –kuvaus on lineaarinen operaattori

$$\Lambda_\gamma : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega),$$

joka voidaan määritellä heikossa muodossa näin:

$$\langle \Lambda_\gamma f, g \rangle = \int_\Omega \gamma \nabla u \cdot \nabla v,$$

missä v on H^1 -funktio reuna-arvolla g ja u toteuttaa Dirichlet'n ongelman

$$\begin{cases} \nabla \cdot \gamma \nabla u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = f & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nyt kuvaus $\gamma \mapsto \Lambda_\gamma$ on epälineaarinen, koska u riippuu johtavuudesta γ .

Impedanssitomografian numeeriset ratkaisutavat voidaan luokitella näin:

Linearisointi

(Barber, Bikowski, Brown, Cheney, Isaacson, Mueller, Newell)

Säännöllistäminen

(Dobson, Hua, Kindermann, Lechleiter, Neubauer, Rieder, Rondi, Santosa, Tompkins, Webster, Woo)

Tilastollinen (Bayesin) inversio (Fox, Kaipio, Kolehmainen, Nicholls, Somersalo, Vauhkonen, Voutilainen)

Vastusverkkomenetelmät (Borcea, Druskin, Vasquez)

Konveksifikaatio (Beilina, Klibanov)

Kerroskuorinta (Cheney, Isaacson, Isaacson, Somersalo)

Käänteisen sironateorian käyttö eli d-bar -menetelmä

(Astala, Bikowski, Bowerman, Isaacson, Kao, Knudsen, Lassas, Mueller, Murphy, Newell, Päivärinta, Saulnier, S, Tamasan)

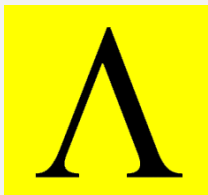
Teichmüller-menetelmä (Kolehmainen, Lassas, Ola)

Osittaisen tiedon menetelmät (...)

Tämä on kaksiulotteisen d-bar –menetelmän lyhyt historia:

Teoria	Tietokonetoteutus
1980 Calderón	2008 Bikowski and Mueller
1987 Sylvester and Uhlmann	
1987 R G Novikov	
1988 Nachman	
1996 Nachman	2000 S, Mueller and Isaacson
1997 Liu	2003 Mueller and S
	2004 Isaacson, Mueller, Newell and S
	2006 Isaacson, Mueller, Newell and S
	2007 Murphy
	2008 Knudsen, Lassas, Mueller and S
1997 Brown and Uhlmann	2001 Knudsen and Tamasan
2001 Barceló, Barceló and Ruiz	2003 Knudsen
2000 Francini	
2003 Astala and Päivärinta	2008 Astala, Mueller, Päivärinta and S
2007 Barceló, Faraco and Ruiz	
2008 Clop, Faraco and Ruiz	

1. Käänteinen johtavuusongelma



2. Kuvantamisen teoria I: äärettömän tarkka mittausdata

3. Kuvantamisen teoria II: kohinainen mittausdata

4. Numeerinen toteutus tietokoneella

5. Rekonstruktioita

Nachmanin yksikäsitteisyystodistus koostuu kahdesta vaiheesta:

$$\Lambda_\gamma \longrightarrow \mathbf{t} \longrightarrow \gamma$$

Apuna käytettävä kompleksimuuttujan funktio \mathbf{t} on *sirontamuunnos*, joka määritellään seuraavasti:

$$\mathbf{t}(k) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\bar{k}\bar{x}} q(x) \psi(x, k) dx$$

$$q = \frac{\Delta \gamma^{1/2}}{\gamma^{1/2}}$$

$$(-\Delta + q)\psi(\cdot, k) = 0$$

$$\psi(x, k) \sim e^{ikx} = e^{i(k_1 + ik_2)(x_1 + ix_2)}$$

Vaihe 1: mittauksesta sirontamuunnokseen

Ratkaise ψ reunaintegraaliyhtälöstä

$$\psi(\cdot, k)|_{\partial\Omega} = e^{ikx} - S_k(\Lambda_\gamma - \Lambda_1)\psi(\cdot, k),$$

missä *single layer* –operaattorin S_k ytimenä on Faddejevin eksponentiaalinen perusratkaisu.

Laske sirontamuunnos kaavalla

$$t(k) = \int_{\partial\Omega} e^{i\bar{k}\bar{x}} (\Lambda_\gamma - \Lambda_1)\psi(x, k) d\sigma(x).$$

Katsotaanpa Faddejevin single layer –operaattoria tarkemmin.

Reunaintegraalioperaattorin

$$(S_k \phi)(x) := \int_{\partial\Omega} G_k(x - y) \phi(y) d\sigma(y)$$

ytimenä on Faddejevin perusratkaisu G_k
Laplacen operaattorille:

$$-\Delta G_k(x) = \delta_0(x).$$

Funktio G_k voidaan esittää muodossa

$$G_k(x) := e^{ikx} g_k(x),$$

missä

$$g_k(x) := \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{ix \cdot \xi}}{|\xi|^2 + 2k(\xi_1 + i\xi_2)} d\xi.$$

Vaihe 2: Sironnamuunnoksesta johtavuuteen

Määritellään $\mu(x, k) = e^{-ikx} \psi(x, k)$

Silloin seuraava d-bar -yhtälö on voimassa:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{k}} \mu(x, k) = \frac{t(k)}{4\pi \bar{k}} e^{-i(kx + \bar{k}\bar{x})} \overline{\mu(x, k)}.$$

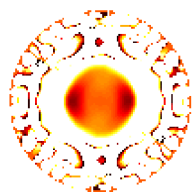
Tässä $\frac{\partial}{\partial \bar{k}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial k_1} + i \frac{\partial}{\partial k_2} \right)$.

Osoittautuu, että d-bar -yhtälöllä on yksikäsitteinen ratkaisu kullekin kiinteälle tason pisteelle x. Johtavuus saadaan näin:

$$\gamma^{1/2}(x) = \lim_{k \rightarrow 0} \mu(x, k).$$

1. Käänteinen johtavuusongelma

2. Kuvantamisen teoria I: äärettömän tarkka mittausdata



3. Kuvantamisen teoria II: kohinainen mittausdata

4. Numeerinen toteutus tietokoneella

5. Rekonstruktioita

Tehdään seuraavat oletukset.

Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ avoin yksikkökierros.

Määritellään mittausfunktio F avaruuksissa

$$F : \mathcal{D}(F) \subset L^\infty(\Omega) \rightarrow Y.$$

Määrittelyjoukko $\mathcal{D}(F)$ on tällainen:

Olkoon $M > 0$ ja $0 < \rho < 1$. Joukko $\mathcal{D}(F)$ sisältää ne funktiot $\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, joille pätee

$$(a) \|\gamma\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq M,$$

$$(b) \gamma(x) \geq M^{-1} \text{ kullekin } x \in \Omega,$$

$$(c) \gamma(x) \equiv 1 \text{ kun } \rho < |x| < 1.$$

Mittausten avaruus Y määritellään näin:

Y koostuu rajoitetuista lineaarikuvauksista

$$\Lambda : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega),$$

joille pätee $\int_{\partial\Omega} \Lambda(f) d\sigma = 0$ ja $\Lambda(1) = 0$.

Huonosti asetettu inversio-ongelmamme tarvitsee epälineaarisen säännöllistämisen

Suora ongelma: kohde $\gamma \in X$, data $\Lambda_\gamma \in Y$.

Jatkuvien kuvauksien perhe $\Gamma_\alpha : Y \rightarrow X$, missä $0 < \alpha < \infty$, on **säännöllistämisstrategia** jos

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|\Gamma_\alpha \Lambda_\gamma - \gamma\|_{L^\infty(\Omega)} = 0$$

jokaisella $\gamma \in X$. Parametrin $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ valinta kohinatason ε funktiona on **sallittu** jos

$$\alpha(\varepsilon) \rightarrow 0 \text{ kun } \varepsilon \rightarrow 0,$$

ja kullakin kiinteällä $\gamma \in X$ pätee

$$\sup_{\Lambda_\gamma^\varepsilon} \left\{ \|\Gamma_{\alpha(\varepsilon)} \Lambda_\gamma^\varepsilon - \gamma\|_{L^\infty(\Omega)} : \|\Lambda_\gamma^\varepsilon - \Lambda_\gamma\|_Y \leq \varepsilon \right\} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Tämä on säännöllistetty d-bar -menetelmä:

Olkoon kohinataso $\varepsilon > 0$ annettu. Ratkaistaan

$$\psi^\varepsilon(\cdot, k)|_{\partial\Omega} = e^{ikx} - S_k(\Lambda_\gamma^\varepsilon - \Lambda_1)\psi^\varepsilon(\cdot, k)|_{\partial\Omega}$$

parametrin k arvoilla $|k| < R(\varepsilon) := -\frac{1}{10} \log(\varepsilon)$.

Tehdään epälineaarinen alipäästösuodatus

$$\mathbf{t}_R^\varepsilon(k) := \begin{cases} \int_{\partial\Omega} e^{i\bar{k}\bar{x}} (\Lambda_\gamma^\varepsilon - \Lambda_1)\psi^\varepsilon(\cdot, k) d\sigma & \text{kun } |k| < R(\varepsilon), \\ 0, & \text{kun } |k| \geq R(\varepsilon). \end{cases}$$

Valitaan $x \in \Omega$ ja ratkaistaan integraaliyhtälö

$$\mu_R(x, k) = 1 + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathbf{t}_R^\varepsilon(s)}{(k-s)\bar{s}} e^{-x(s)} \overline{\mu_R(x, s)} ds_1 ds_2.$$

Määritellään $\alpha(\varepsilon) = \frac{1}{R(\varepsilon)}$ ja $(\Gamma_\alpha \Lambda_\gamma^\varepsilon)(x) := (\mu_R(x, 0))^2$.

Lause [Knudsen, Lassas, Mueller & S 2008]

Perhe Γ_α on hyvin määritelty, kun $\alpha > 0$ on riittävän pieni. Edelleen: Γ_α on säännöllistämistä strategia sallitulla valinnalla

$$\alpha(\varepsilon) = \left(-\frac{1}{10} \log(\varepsilon)\right)^{-1}.$$

Lisäksi suppenemisnopeudelle pätee

$$\sup_{\Lambda_\gamma^\varepsilon} \left\{ \|\Gamma_{\alpha(\varepsilon)} \Lambda_\gamma^\varepsilon - \gamma\|_{L^\infty(\Omega)} : \|\Lambda_\gamma^\varepsilon - \Lambda_\gamma\|_Y \leq \varepsilon \right\}$$

$$\leq C(-\log \varepsilon)^{-1/14}$$

$$\rightarrow 0 \text{ kun } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Lisähuomio: säännöllistämisstrategia ei tullut vielä määritellyksi koko data-avaruudessa Y

Kuva-avaruutta $F(\mathcal{D}(F)) \subset Y$ ei tunneta, ja se voi olla rakenteeltaan monimutkainen. (Tämä liittyy tunnetusti hankalaan ja edelleen avoimeen *karakterisaatio-ongelmaan*.)

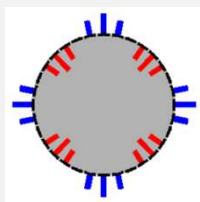
Edellisen kalvon tulos antaa todistuksen ainoastaan niille operaattoreille, joiden etäisyys kuvajoukosta $F(\mathcal{D}(F))$ on korkeintaan ε_0 .

Tämä puute voidaan paikata spektraaliteoreettisella argumentilla.

1. Käänteinen johtavuusongelma

2. Kuvantamisen teoria I: äärettömän tarkka mittausdata

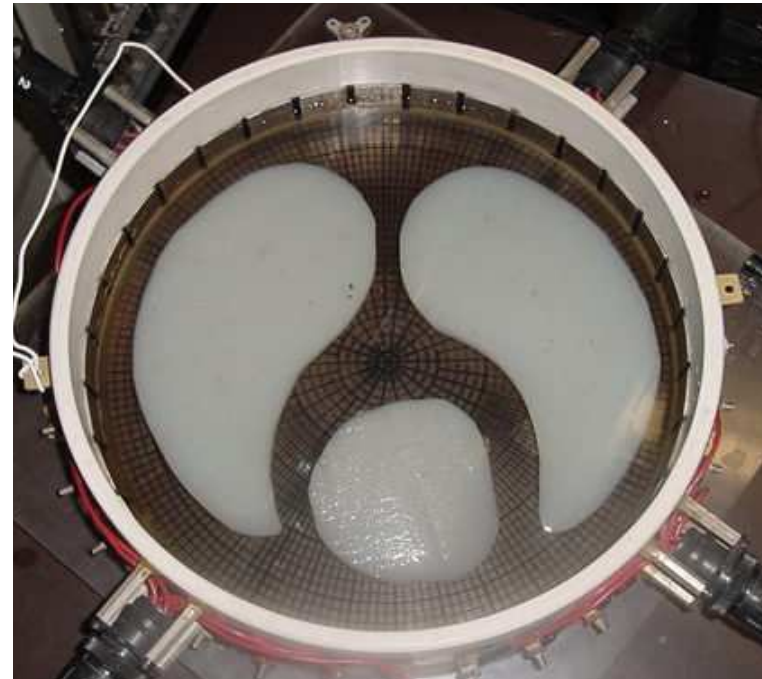
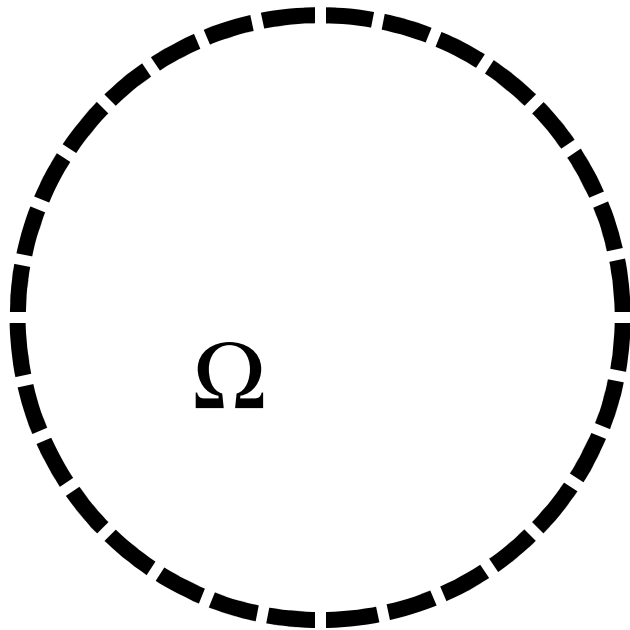
3. Kuvantamisen teoria II: kohinainen mittausdata



4. Numeerinen toteutus tietokoneella

5. Rekonstruktioita

Käytännön mittaukset tehdään käyttämällä elektrodeja. Alla tyypillinen mittausjärjestely.

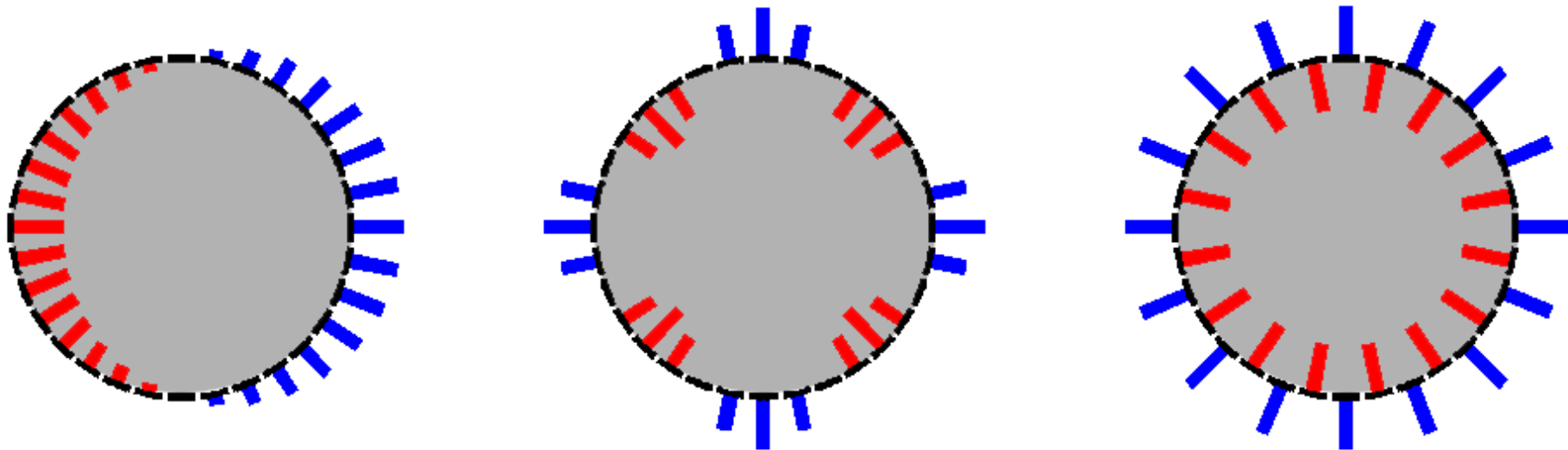


Tässä elektrodien määrä on $N=32$.

Mittalaite on Rensselaer Polytechnic Institutessa Yhdysvalloissa.

Lineaarisesti riippumaton joukko virtakuvioita syötetään kohteeseen ja jännitteet mitataan

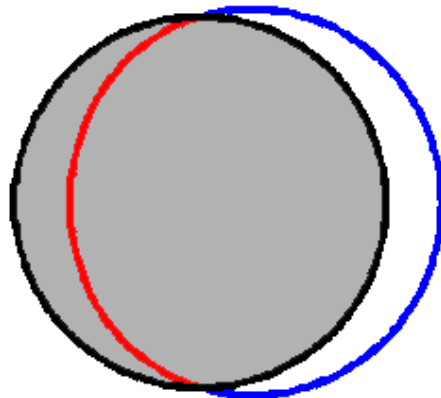
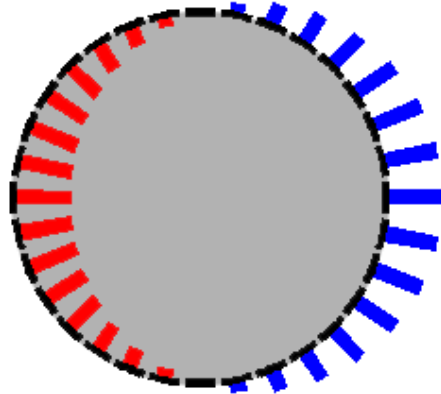
Tässä on kolme esimerkkiä tapauksessa $N=32$:



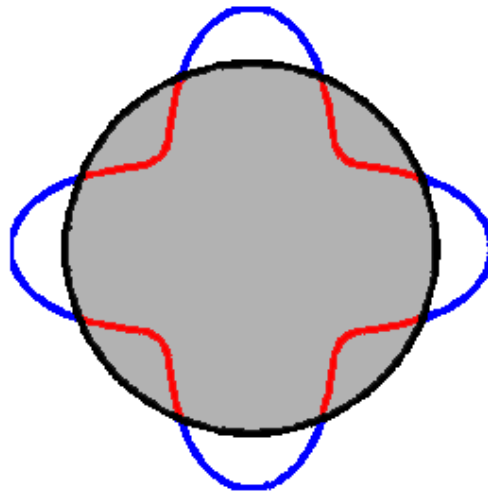
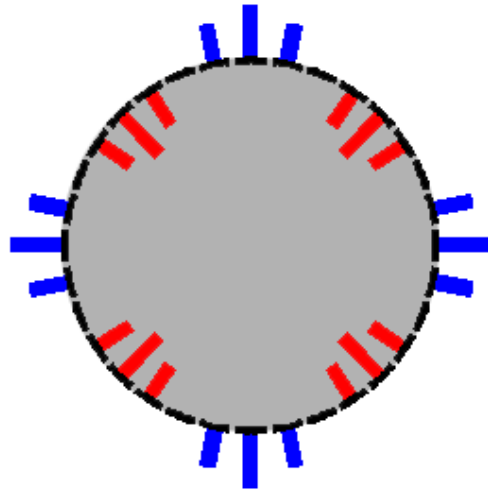
Varauksen säilymislain takia lineaarisesti riippumattomia virtakuvioita on $N-1$ kappaletta.

Diskreeteillä virtakuvioilla approksimoidaan trigonometrisia funktioita reunalla

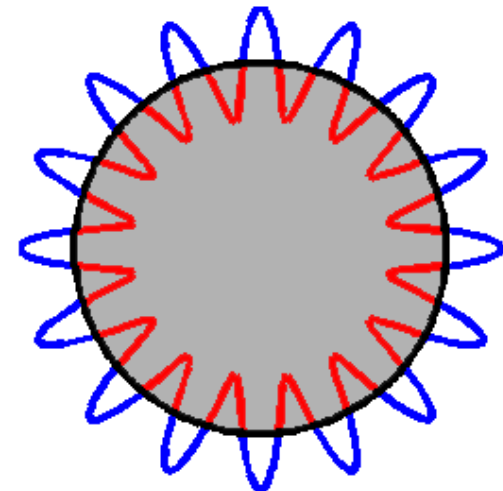
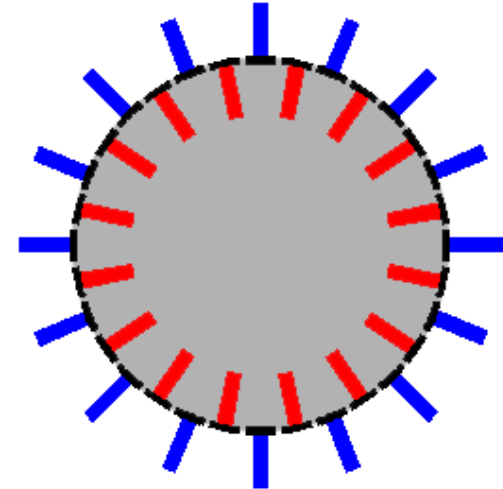
$\cos(\theta)$



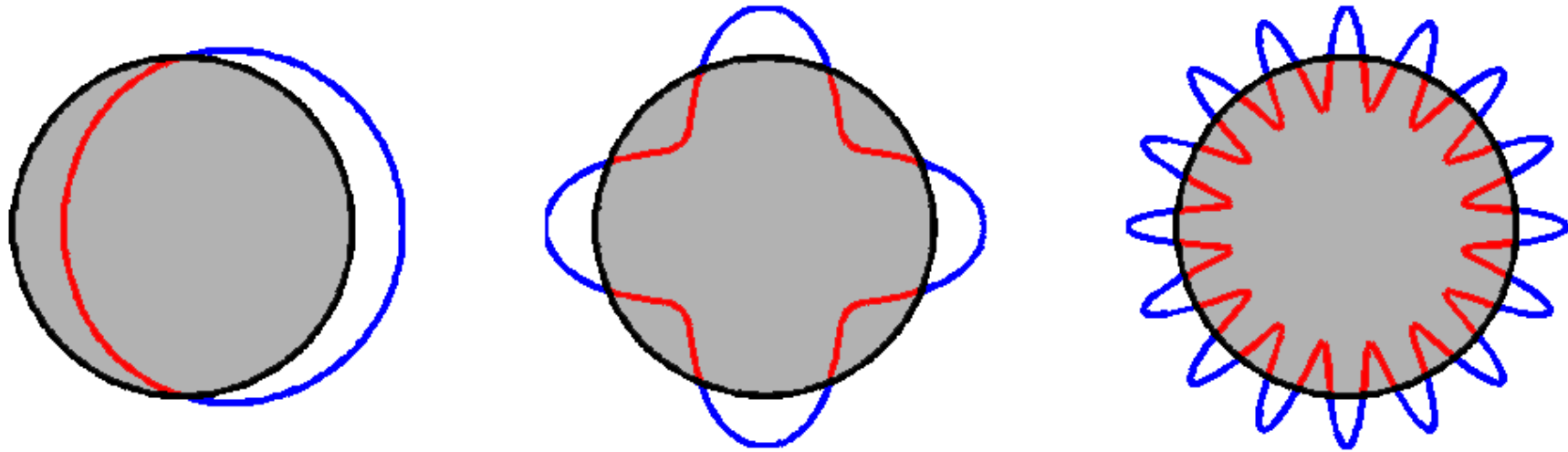
$\cos(4\theta)$



$\cos(16\theta)$



Yksikkökiekolla määriteltyjä funktioita approksimoidaan katkaistussa Fourier-kannassa $\{e^{in\theta}\}_{n=-K}^K$.



Integraalioperaattorit $A : H^s(\partial\Omega) \rightarrow H^r(\partial\Omega)$ esitetään matriiseina $[\langle Ae^{in\theta}, e^{im\theta} \rangle]$.

- Λ_1 tiedetään analyyttisesti,
- Λ_γ mitataan (tai simuloidaan elementtimenetelmällä),
- S_k lasketaan Gaussin integroinnilla.

Päädymme kaksivaiheiseen säännöllistettyyn d-bar -menetelmään

1. Ratkaistaan diskretoitu matriisiyhtälö

$$\psi^\varepsilon(\cdot, k)|_{\partial\Omega} = e^{ikx} - S_k(\Lambda_\gamma^\varepsilon - \Lambda_1)\psi^\varepsilon(\cdot, k)|_{\partial\Omega},$$

missä k saa arvoja kiekossa $|k| < R$. Säde R otetaan niin suureksi kuin numeerisen stabiilisuuden kannalta on mahdollista.

2. Integraaliyhtälö

$$\mu_R(x, k) = 1 + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{t_R^\varepsilon(s)}{(k-s)\bar{s}} e^{-x(s)} \overline{\mu_R(x, s)} ds_1 ds_2$$

ratkaistaan numeerisesti periodisointitempulla.

Rekonstruoitu johtavuus on $(\mu_R(x, 0))^2$.

Käydään läpi d-bar -yhtälön numeerinen ratkaisumenetelmä.

Kirjoitetaan d-bar -yhtälö

$$\frac{\partial}{\partial \bar{k}} \mu_R(x, k) = \frac{t_R^{\text{exp}}(k)}{4\pi \bar{k}} e^{-i(kx + \bar{k}\bar{x})} \overline{\mu_R(x, k)}$$

integraalimuotoon käyttäen perusratkaisua:

$$\mu_R(x, k) = 1 + \frac{1}{\pi k} * \left(\frac{t_R^{\text{exp}}(k)}{4\pi \bar{k}} e^{-i(kx + \bar{k}\bar{x})} \overline{\mu_R(x, k)} \right)$$

Tämä Lippmann-Schwinger -tyyppinen yhtälö voidaan ratkaista muokkaamalla Gennadi Vainikon menetelmää.

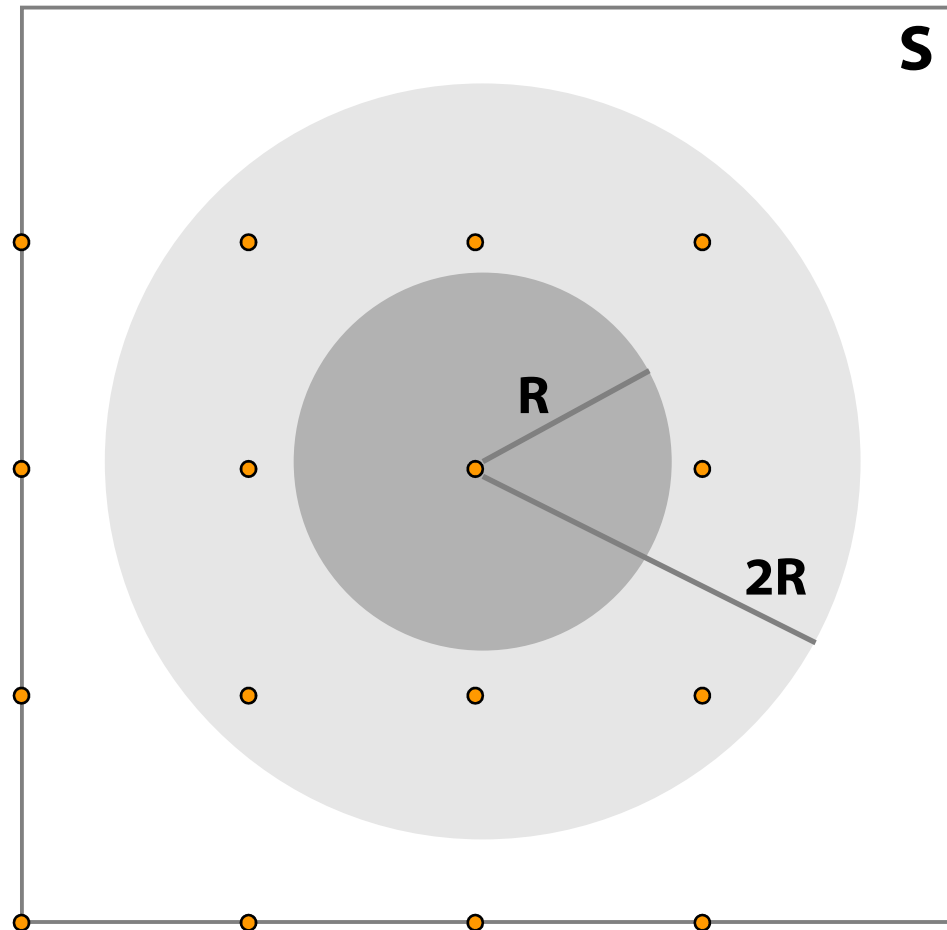
$$\gamma_R^{1/2}(x) = \mu_R(x, 0).$$

Valitaan neliö S , jota käytetään jaksollisten funktioiden määrittelyjoukkona k -tasossa

Muodostetaan hila, joka soveltuu nopealle Fourier-muunnokselle (FFT).

Tässä 4x4 pisteen hila; käytännössä hilat ovat kooltaan vähintään 512x512 pistettä.

Huomaa, että neliö S sisältää kiekon, jonka säde on $2R$.



Nyt \bar{d} -yhtälö voidaan ratkaista äärellisessä alueessa (neliössä S) koko tason sijasta

Koko k -tason \bar{d} -yhtälö on integraalimuodossa

$$\mu_R(x, k) = 1 + \frac{1}{\pi k} * \left(\frac{t_R^{\text{exp}}(k)}{4\pi \bar{k}} e^{-i(kx + \bar{k}\bar{x})} \overline{\mu_R(x, k)} \right)$$

Ratkaisemme sen sijaan jaksollisen yhtälön

$$\left[I + \frac{1}{\pi k} * (T_R \cdot \bar{}) \right] w = 1$$
$$T_R(k) = - \frac{t_R^{\text{exp}}(k)}{4\pi \bar{k}} e^{-i(kx + \bar{k}\bar{x})} \Big|_{k \in S}$$

Tämä riittää [Knudsen, Mueller & S 2004], koska

$$\mu_R(x, \cdot) \Big|_{B(0, R)} = w \Big|_{B(0, R)}$$

Ratkaisumenetelmä on yleistys tuloksesta [Vainikko 2000].

Ratkaisumenetelmä perustuu lineaarisen yhtälöryhmän iteratiiviseen ratkaisemiseen

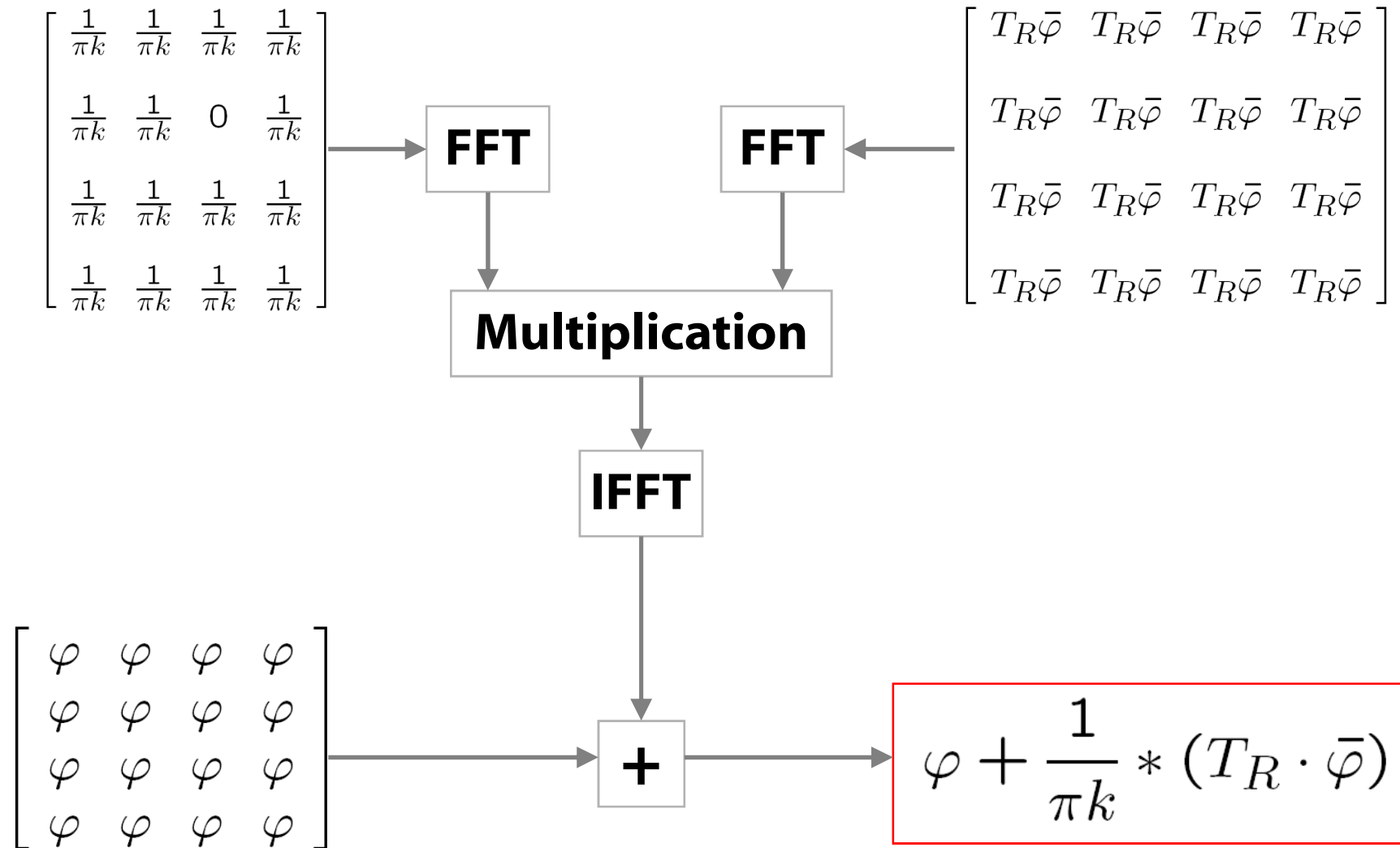
Äärellisulotteinen matriisiyhtälö

$$\left[I + \frac{1}{\pi k} * (T_R \cdot \bar{\cdot}) \right] w = 1$$

voidaan ratkaista iteratiivisesti käyttämällä esimerkiksi GMRES-menetelmää. Tarvitaan vain ohjelmanpätkä, joka laskee annetulle funktiolle seuraavan suureen:

$$\varphi + \frac{1}{\pi k} * (T_R \cdot \bar{\varphi})$$

Jaksollinen konvoluutio voidaan toteuttaa kätevästi nopealla Fourier-muunnoksella



Huomaa: on tärkeää kirjoittaa reaali- ja imaginaariosat erikseen!

1. Käänteinen johtavuusongelma

2. Kuvantamisen teoria I: äärettömän tarkka mittausdata

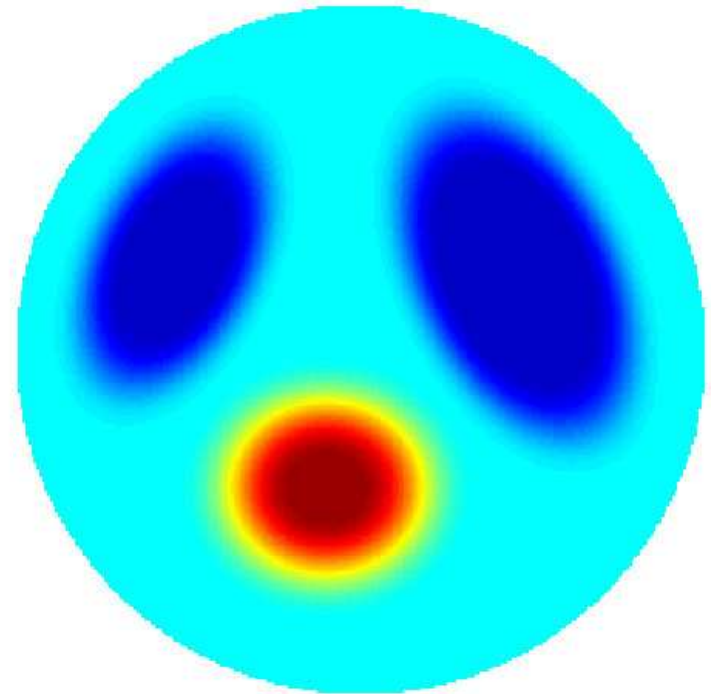
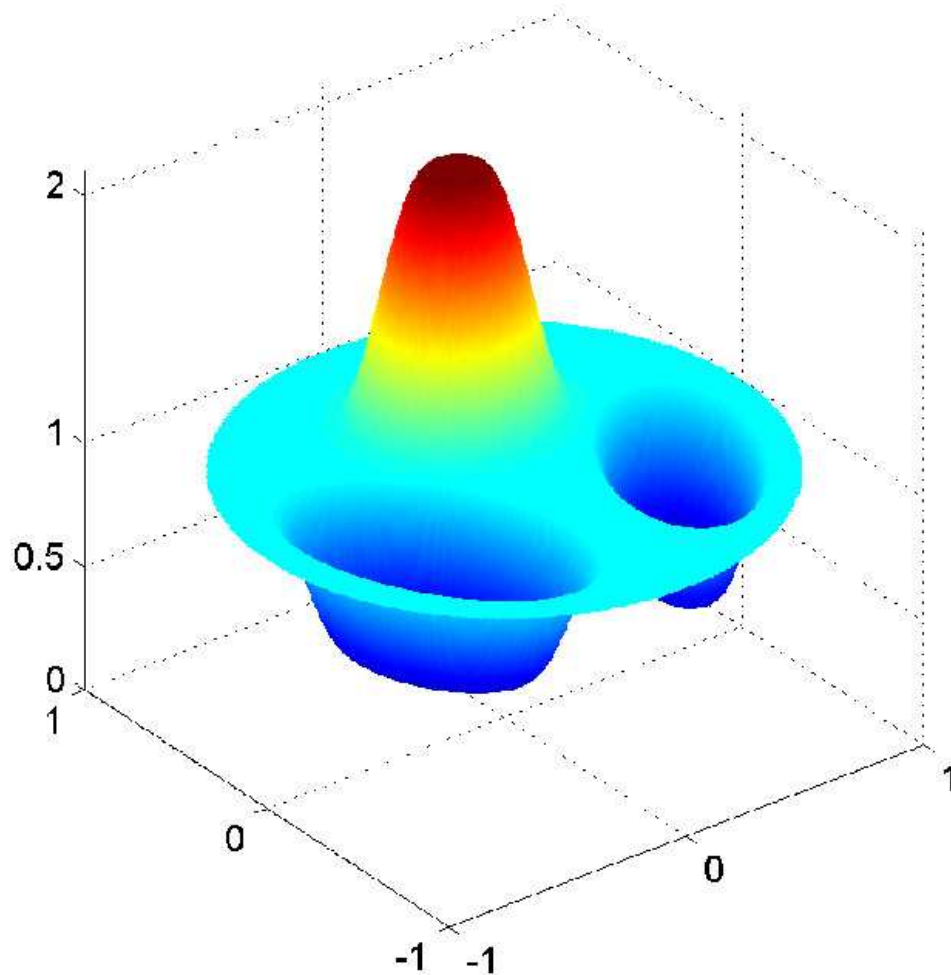
3. Kuvantamisen teoria II: kohinainen mittausdata

4. Numeerinen toteutus tietokoneella



5. Rekonstruktioita

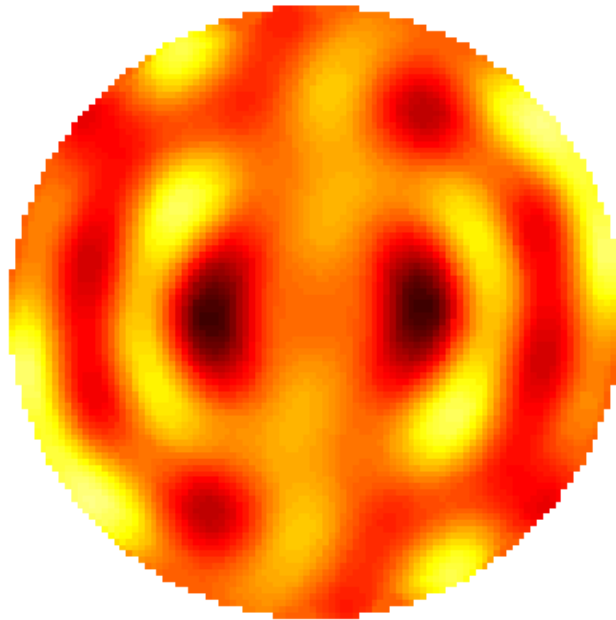
Kokeillaan säännöllistettyä d-bar -menetelmää simuloidulle johtavuudelle



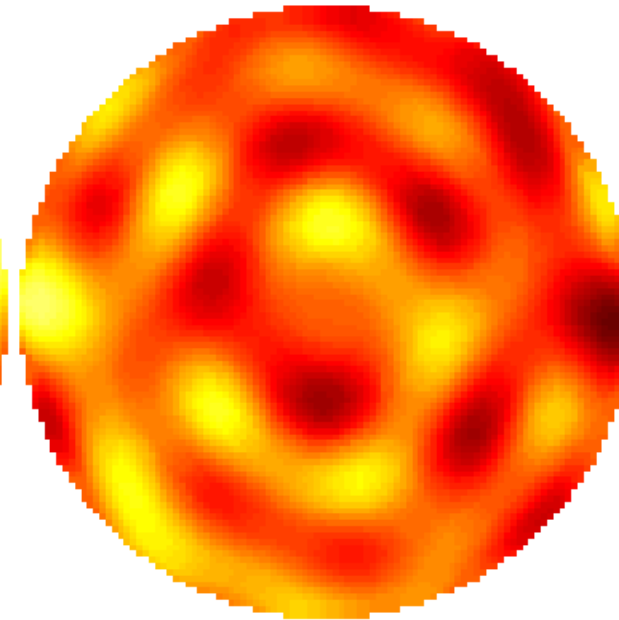
Lasketaan elementtimenetelmällä yllä olevalle johtavuudelle Dirichlet-Neumann -kuvaus ja lisätään satunnaista virhettä.

Sirontamuunnos $t(k)$ näyttää tältä

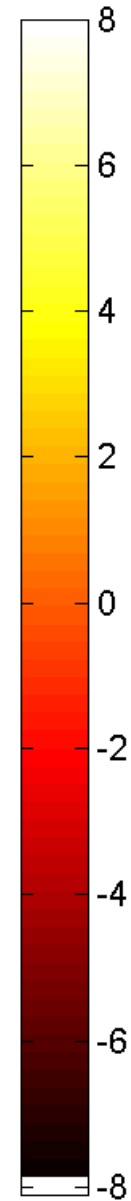
$t(k)$:n reaaliosa



$t(k)$:n imaginaariosa

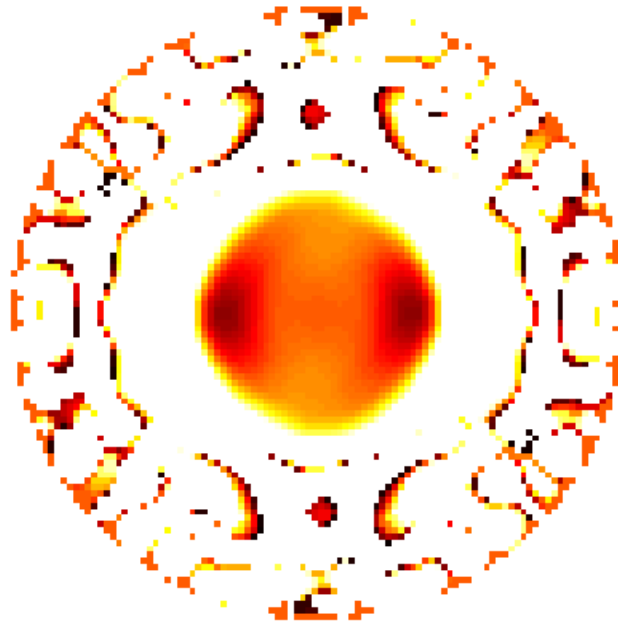


Kuvassa $|k| < 10$.

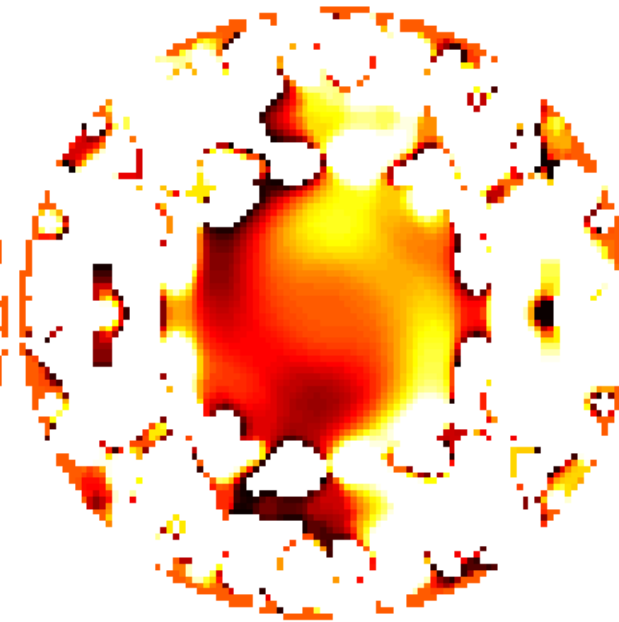


Mittausvirheen vaikutus näkyy selvästi

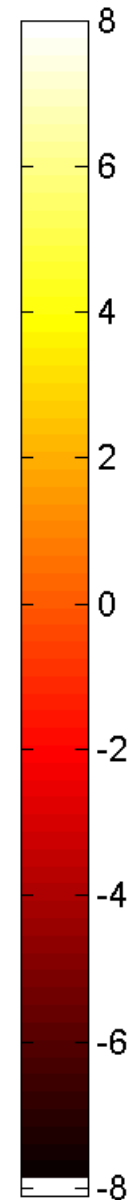
$t(k)$:n reaali-osa



$t(k)$:n imaginaari-osa

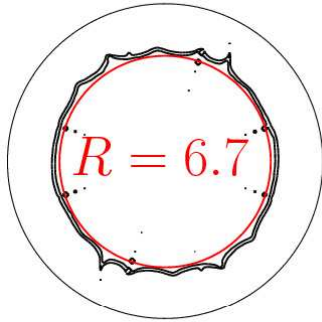


Kuvassa $|k| < 10$.

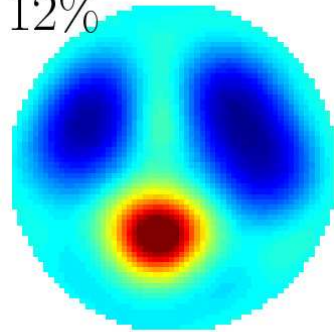


Tässä on sarja rekonstruktioita eri kohinatasoilla ja vastaavilla katkaisusäteillä

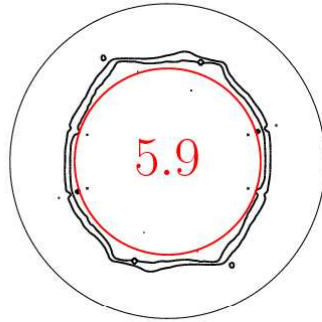
$$\|\mathcal{E}\|_Y \approx 10^{-6}$$



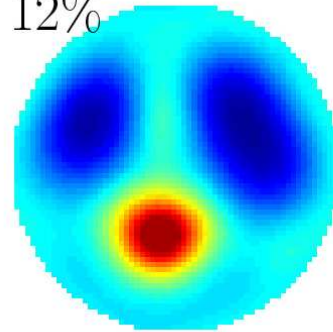
12%



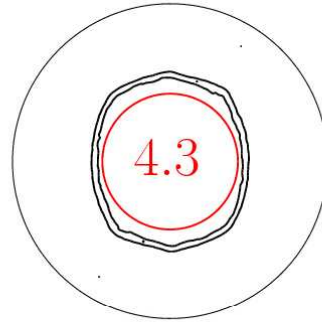
$$\|\mathcal{E}\|_Y \approx 10^{-5}$$



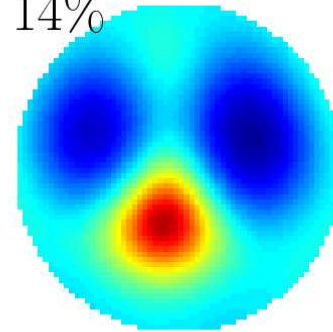
12%



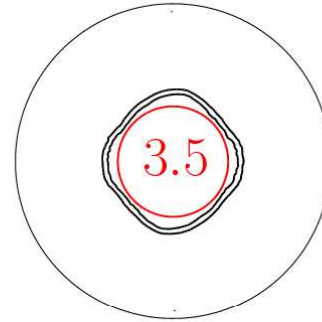
$$\|\mathcal{E}\|_Y \approx 10^{-4}$$



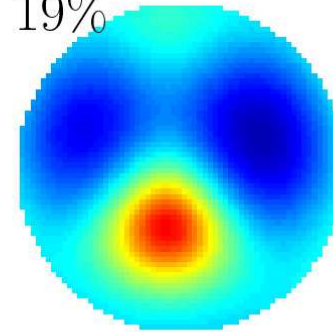
14%



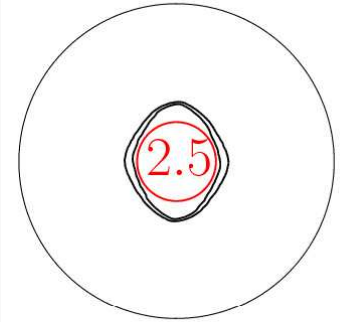
$$\|\mathcal{E}\|_Y \approx 10^{-3}$$



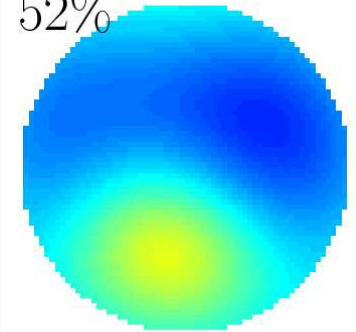
19%



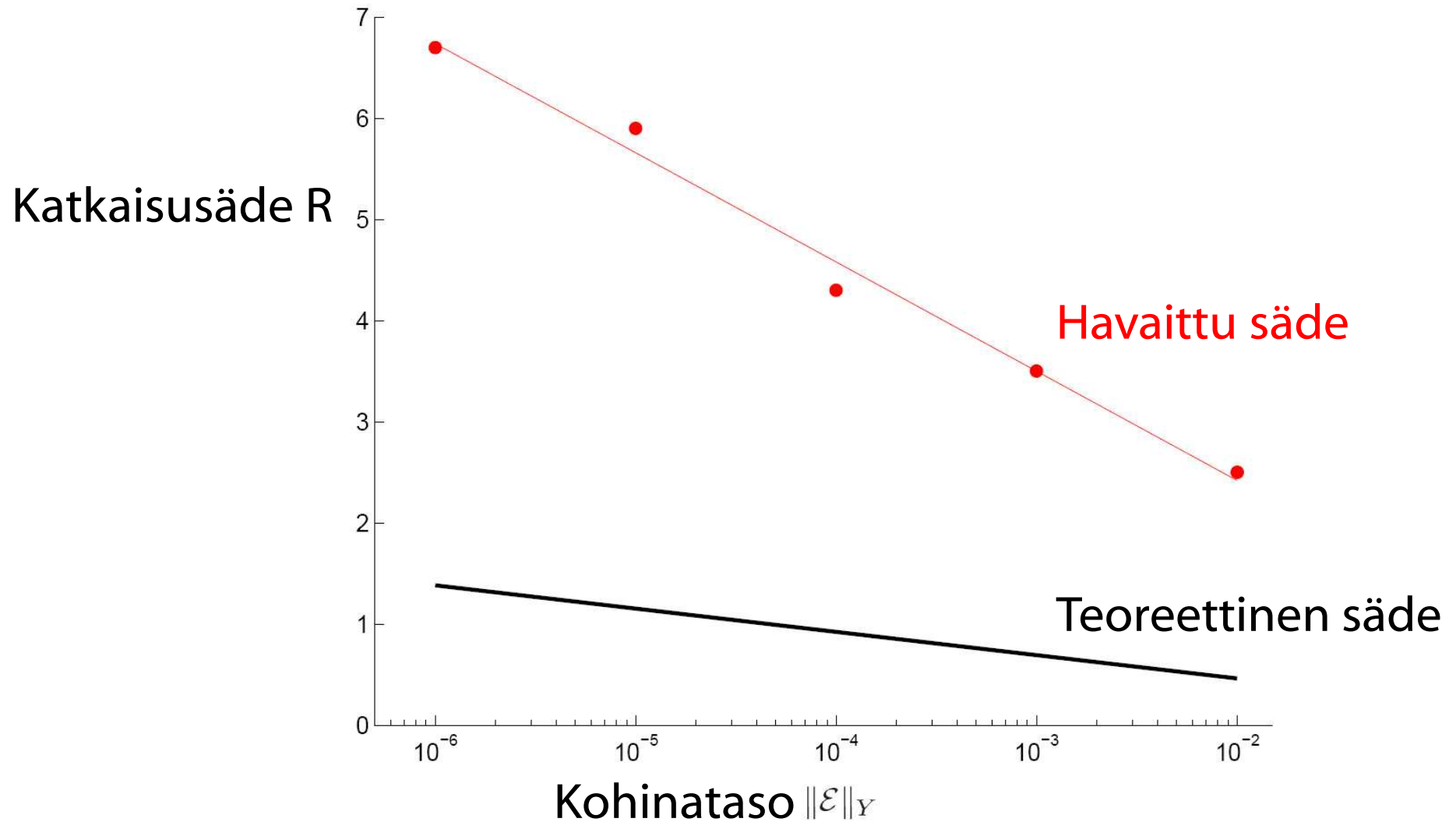
$$\|\mathcal{E}\|_Y \approx 10^{-2}$$



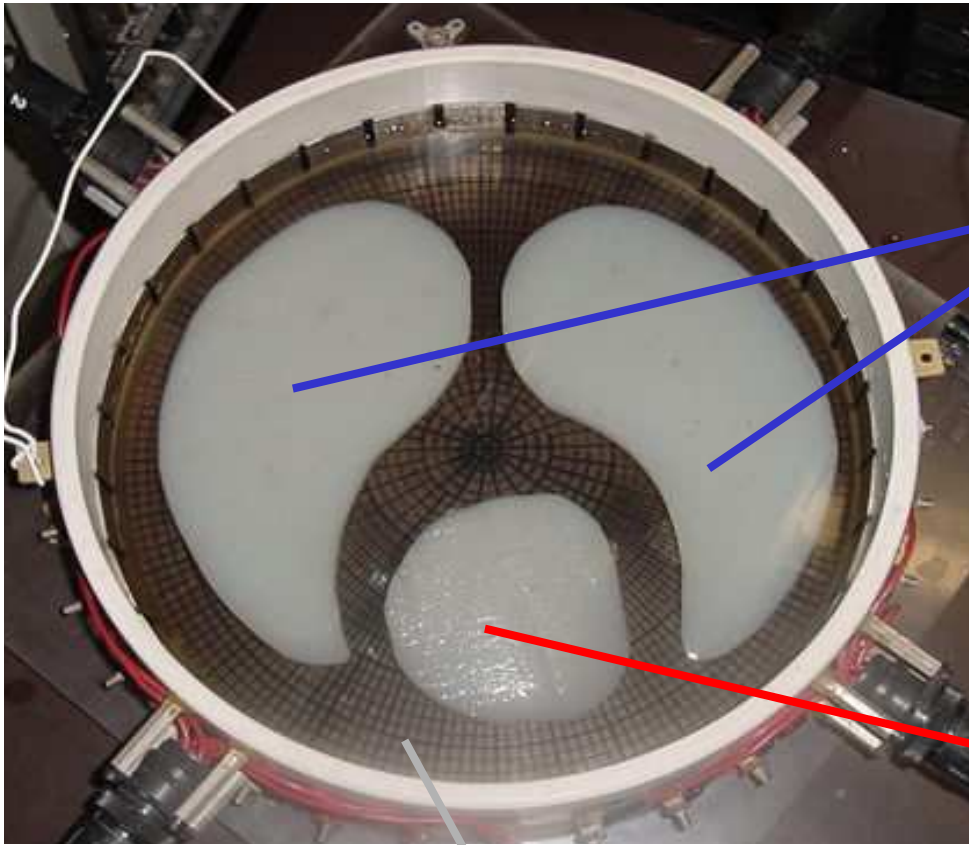
52%



Numeeriset tulokset viittaavat siihen, että teoreettista katkaisusädettä voidaan parantaa



Rakensimme keinotekoisen rintakehäleikkeen Rensselaer Polytechnic Institutessa

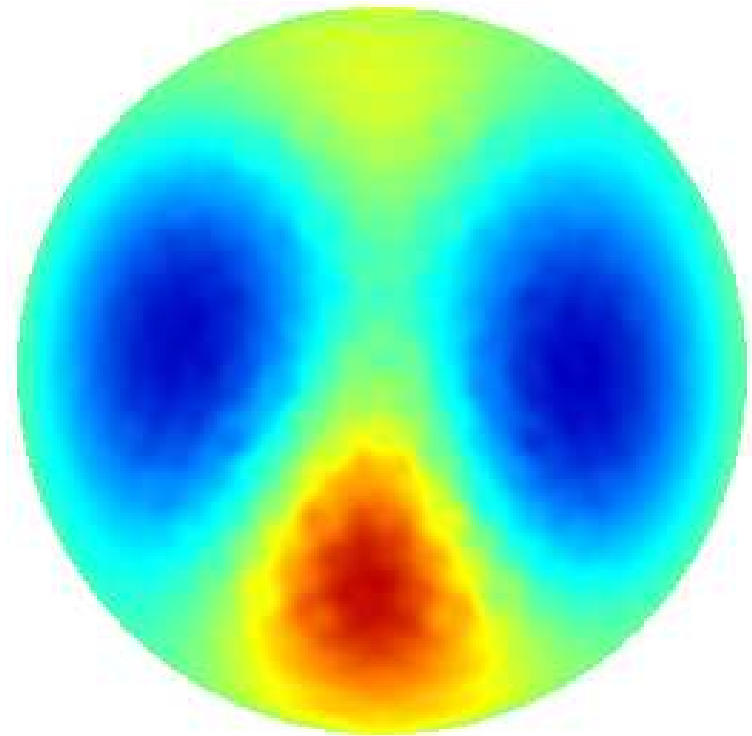
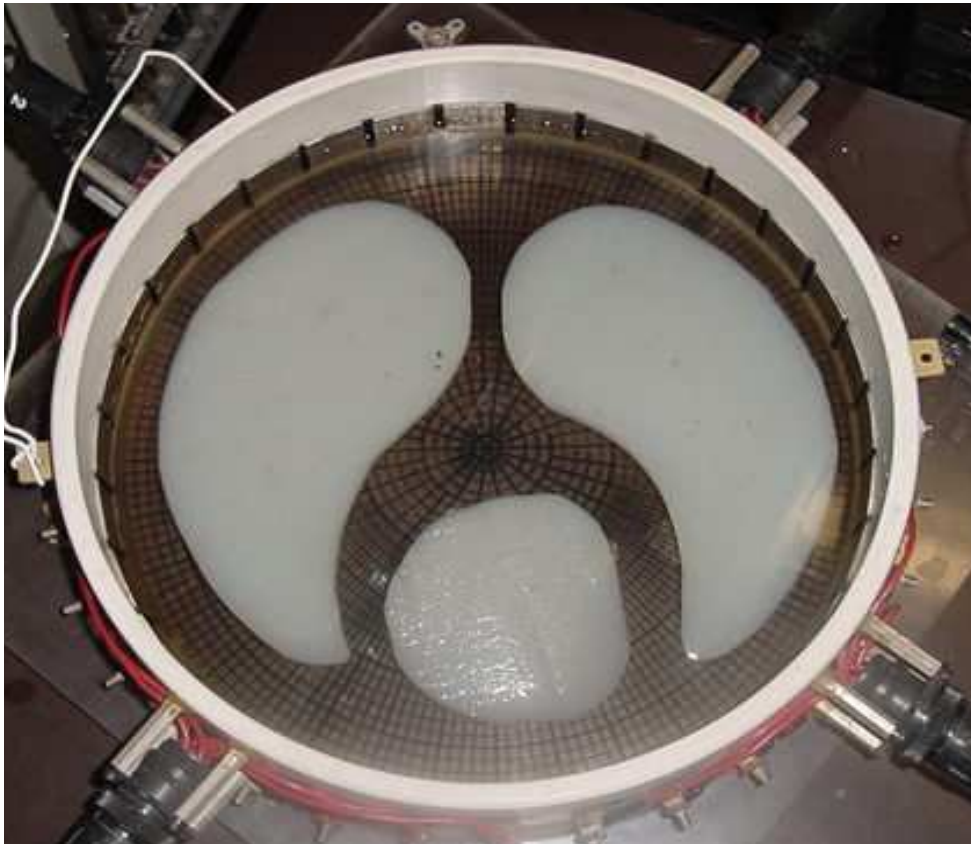


"Keuhkot", joiden
johtavuus on matalampi
kuin taustan
(240 mS/m)

"Sydän", jonka
johtavuus on korkeampi
kuin taustan
(750 mS/m)

Taustaneste on suolavettä, jonka johtavuus on 424 mS/m.
Tankin halkaisija on 30cm.

Rekonstruktio mitatusta datasta d-bar -menetelmää käyttäen



Suhteellinen virhe 23% (keuhko) ja 12% (sydän).
Dynaaminen alue on 94% todellisesta.
[Isaacson, Newell, Mueller & S 2004]

Lähtitulevaisuuden tärkeimmät tavoitteet:

1. Kehitetään lääketieteellisiä sovelluksia yhteistyössä lääkäreiden kanssa.
2. Poistetaan se epärealistinen oletus, että johtavuuden tulee olla kahdesti derivoituva.



Kari Astala

Helsingin yliopisto



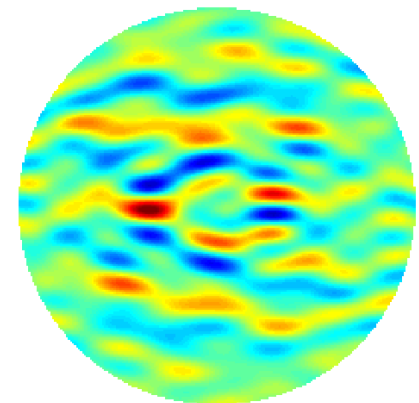
Jennifer Mueller

Colorado State University, USA



Lassi Päivärinta

Helsingin yliopisto



www.siltanen-research.net

Astala, Mueller, Päivärinta and S

Numerical computation of complex geometrical optics solutions to the conductivity equation, submitted.

Knudsen, Lassas, Mueller and S

Regularized D-bar method for the inverse conductivity problem, submitted.

Knudsen, Lassas, Mueller and S

Reconstructions of Piecewise Constant Conductivities by the D-bar Method for Electrical Impedance Tomography

To appear in proceedings of Applied Inverse Problems 2007, Vancouver.

Knudsen, Lassas, Mueller and S 2007

D-bar method for electrical impedance tomography with discontinuous conductivities

SIAM Journal of Applied Mathematics **67**(3), pp. 893-913

Lassas, Mueller and S 2007

Mapping properties of the nonlinear Fourier transform in dimension two

Communications in Partial Differential Equations **32**(4), pp. 591-610

Isaacson, Mueller, Newell and S 2006

Imaging Cardiac Activity by the D-bar Method for Electrical Impedance Tomography

Physiological Measurement **27**, pp. S43-S50

Isaacson, Mueller, Newell and S 2004

Reconstructions of chest phantoms by the d-bar method for electrical impedance tomography

IEEE Transactions on Medical Imaging **23**(7), pp. 821-828

Knudsen, Mueller and S 2004

Numerical solution method for the dbar-equation in the plane

Journal of Computational Physics **198**(2), pp. 500-517

Mueller and S 2003

Direct reconstructions of conductivities from boundary measurements

SIAM Journal of Scientific Computation **24**(4), pp. 1232-1266

S, Mueller and Isaacson 2000

An implementation of the reconstruction algorithm of A. Nachman for the 2-D inverse conductivity problem

Inverse Problems **16**, pp. 681-699; *Erratum* Inverse problems **17**, pp. 1561-1563